EXERCICE N°3 : | 25' | 4 points

Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux de ces pièces sont normales : elles possèdent une face « FACE » et une face « PILE ». La troisième est truquée : elle possède deux faces « FACE ».
On extrait une pièce de l'urne au hasard, puis on effectue des lancers successifs et indépendants de cette pièce. On considère les événements suivants :

A : « la pièce extraite est normale » , $\overline{A}$: « la pièce extraite est truquée »

P : « on obtient PILE au premier lancer » ,
$\mathbf{F_n}$: « on obtient FACE aux n premiers lancers ».

1) a) Calculer $p(P\cap A)$ et $p(P\cap \overline{A})$
b) En déduire p(P).

2) Montrer que $p(F_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+1\right)$.

3) a) Sachant qu'on a obtenu FACE n fois au cours des n premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir extrait la pièce truqué ?
b) Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE N°4 : | 25' | 4 points

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux événements suivants :

A : " On obtient des boules des deux couleurs " ;

B : " On obtient au plus une blanche ".

1°) a) Calculer la probabilité de l'événement : " Toutes les boules tirées sont de même couleur ".

b) Calculer la probabilité de l'événement : " On obtient exactement une boule blanche ".

c) En déduire que les probabilités $p(A\cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :

$$p(A\cap B) = \frac{n}{2^n} \quad ; \quad p(A) = 1-\frac{1}{2^{n-1}} \quad ; \quad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

2°) Montrer que $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$ si, et seulement si, $2^{n-1} = n+1$.

3°) Soit (u_n) la suite définie, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux, par $u_n = 2^{n-1}-(n-1)$.

Calculer u_2, u_3, u_4. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4°) En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn